Задачи на смеси и сплавы, концентрацию.

мастер-класс

2010

Кушхова Светлана Михайловна

МОУ СОШ №3 г.Нарткала Урванского района КБР

01.07.2010

Почему-то задачи на эту тему вызывают у школьников чуть ли не ужас. Много лет подряд на ЕГЭ под номером В9 стояли задачи по этой теме и получив распечатки результатов работ учащихся можно было наблюдать, что столбиком под В9 стоят нули, т.е. ребята даже не брались за решение этого номера. Это и послужило поводом для того, чтобы попытаться как-то систематизировать знания по этой теме и облегчить учащимся понимание этого вопроса.

Изучение задач на смеси и сплавы и концентрацию опирается на задачи на проценты, которые сами по себе представляют для детей немалую сложность, особенно задачи на сложные проценты. Я некоторое время занималась этими вопросами и хочу представить вашему вниманию свои наработки.

Изучения темы предлагаю начать с повторения задач на проценты. Их три типа:

Слайд 3

1.Нахождение р% от числа А.Т.к. 1%-это сотая часть числа , то мы каждый раз проценты будем переводить в десятичную дробь, т.е. делить на 100. Это облегчит нашу работу при составлении выражений для решения более сложных задач, хотя на этом этапе удобнее было бы решать задачи на проценты с помощью пропорций, тогда не приходится выяснять, к какому типу относится данная задача, что представляет наибольшую сложность для учащихся при делении задач на типы.

Итак, переводим р% в десятичную дробь и умножаем А на 0,01р.

Слайд 4

2.Найти число А по его р%.

 Переводим р% в десятичную дробь и А делим на 0,01р.

Слайд 5

3.Сколько процентов составляет число А от числа В.

А делим на В и умножаем на 100%.

Предлагаю несколько простеньких задач на эти типы: здесь важны не столько вычисления, сколько определение типа задач и применение нужной формулы.

Слайд 6

Что нужно сделать, чтобы:

* найти 5% от 70; 120% от 55; 0,23% от 46
* найти число, если 22% от него составляют 56; 154% от него составляют 71; 0,03% от него составляют 2
* сколько % составляет 5 от27; 76 от 23; 123 от 5.

Расширяем задачи 1 типа.

Слайд 7

 Увеличить (уменьшить) число А на р%

100%+р%(100%-р%) переводим в десятичную дробь, получается 1+0,01р( 1-0,01р), а дальше по 1 типу, умножаем на эту дробь число А.

Слайд 8

Что нужно сделать, чтобы:

* увеличить число 77 на 10%; на 125%; на 0,05%
* уменьшить число 567 на 35%; на 2%; на 0, 12%

Если надо некоторое число А увеличить (уменьшить) на р% n раз, то достаточно А умножить на (1+0,01р)n ((1-0,01р)n).

* денежный вклад в размере 1500р за год возрастает на 8%.Какова будет сумма вклада через 5 лет?$\left(1500×1,08^{5}\right)$

Если же число А сперва увеличить на р%, а затем получившееся число уменьшить на те же р%, или наоборот, то получится: А(1+0,01р)(1-0,01р)=А(1-0,0001р2 ) .Эта задача обычно вызывает бурю протеста, считают, что увеличив и уменьшив А на одно и то же число процентов, мы должны получить исходное число А.

Слайд 9

* цену А товара повысили на 20%, затем ее снизили на 20%.Как изменилась цена товара?

А$×$1,2$×$0,8=0,96А, т.е. цена понизилась на 4%.

Здесь же по принципу Укрупнения Дидактических Единиц по Ердниеву, разумно решить задачи обратного типа, т.е. число сперва увеличили (уменьшили) на р%. На сколько процентов надо уменьшить (увеличить) получившееся число, чтобы снова получить исходное число А.

Итак, увеличим А на р%

 А(1+0,01р),

затем уменьшим его на х%

 А(1+0,01р)(1-0,01х) и должно получиться само число А.

Решив получившееся уравнение относительно х и упростив полученное выражение, выводим формулу:$ $

$$х=\frac{р}{1+0,01р}$$

Аналогично выводится формула для случая, если сперва уменьшили на р%, а затем надо увеличить на х%, чтобы число А осталось неизменным:

$$х=\frac{р}{1-0,01р}$$

Например:

Слайд 10

1.Цена товара была повышена на 12%.На сколько % надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную?

Используя первую формулу, получаем:

 $х=\frac{12}{1+0,12}$=10$\frac{5}{7}$%

2.Производительность труда на заводе снизилась на 20%.На сколько % надо ее теперь повысить, чтобы достигнуть первоначальной?

По второй формуле получаем:

$$х=\frac{20}{1-0,2}=25\%$$

3.Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько % нужно повысить производительность труда, чтобы заработная плата осталась прежней?

Значит, сколько за 8 часов производили раньше, теперь надо производить за 7 часов, разумеется с повышенной на р% производительностью труда:

8А=7(1+0,01р)А , где А-производительность, из чего выводим р=$14\frac{2}{7}\%$.

Слайд 11

4.На сколько % снизилась производительность труда, если для выполнения плана пришлось увеличить рабочий день с 7 до 8 часов?

Т.е., то, что раньше выполняли за 7 часов, теперь выполняют за 8 часов, соответственно с пониженной на р% производительностью труда:

7А=8(1-0,01р)А , из чего получаем р=12,5%

5.Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько % нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата выросла на 12%?

Теперь за 7 часов надо суметь сделать на 12% больше того, чем раньше за 8 часов, разумеется, увеличив производительность на р%:

7(1+0,01р)А =8$×$1,12А, из чего получаем р=28%

 Рассмотрев три типовые задачи и прорешав достаточное количество тренировочных задач для закрепления, можно переходить к задачам на процентное содержание и концентрацию вещества.

 Концентрацией мы называем отношение массы «чистого элемента» к общей массе вещества, выраженное в %, где за «чистый элемент» мы будем принимать компонент, содержание которого нас интересует в данной смеси.

Слайд 12

6.В сосуде содержится 5л 20%-ного водного раствора кислоты. Сколько л воды необходимо добавить в этот сосуд, чтобы получить 5%-ный раствор кислоты?

Находим массу кислоты в этом растворе (1 тип задач на %):

5$×$0,2=1л

Добавим х л. воды, а кислоты остается неизменное количество, т.е.1л., концентрация должна равняться 5%, следовательно, составляем уравнение:

$$\frac{1}{5+х}=0,05$$

Из чего находим х=15 л.

7.Один сплав содержит 2 металла, массы которых относятся как 2:3, а в другом сплаве массы этих же металлов относятся как 3:7.Какие массы первого и второго сплавов надо сплавить вместе, чтобы получить третий сплав, массой 1,5 кг, в котором эти металлы находились бы в отношении 1:2?

Слайд 13

Начнем с того, что в третьем сплаве массой 1,5 кг 1 часть одного металла и 2 части другого, т.е. 0,5 кг первого и 1 кг второго металла. Если взять за х кг вес 1 сплава, который нужно взять для третьего сплава, то в нем 0,4х кг первого металла. Тогда, из (1,5-х) кг второго сплава 0,3(1,5-х) первого металла. Составим уравнение по первому металлу:

0,4х+0,3(1,5-х)=0,5, откуда получаем, что х=0,5,т.е. 0,5 кг первого и, следовательно, 1 кг второго сплава.

Слайд 14

Рассмотрим задачу с моделью вида

 ах + ву = с(х+у).

* Имеются три слитка. Масса первого 5кг, второго-3кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание меди в нем.

Пусть х- масса третьего слитка, а р- его концентрация. Тогда можно составить систему из двух уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}0,3×5+х×р=\left(5+х\right)×0,56\\0,3×3+х×р=\left(3+х\right)×0,6\end{array}\right.$$

Решив систему, получаем:х=10кг;р=0,69.

Слайд 15

Рассмотрим теперь модную в последние годы задачу с параметром по нашей теме.

8.В сосуде емкостью 6л. содержится 4л 40%-ной уксусной кислоты. Другой сосуд содержит 5л такой же р%- ной кислоты. Сколько л кислоты из второго сосуда надо долить в первый, чтобы получить кислоту максимальной концентрации? Найти эту концентрацию.

р здесь параметр и в зависимости от его значения, возможны три случая :

* если р$\in \left[0,40\right[$, то во втором сосуде более слабая концентрация и добавлять в первый ничего не надо, иначе концентрация уменьшится.
* если р=40, то концентрации одинаковые и можно добавлять любое количество от 0 до 2 л.

Слайд 16

* если р$>$40,то концентрация во втором сосуде выше, чем в первом и добавить нужно максимально возможное количество, т.е.2л.

При этом из 2л р%-ной кислоты добавится 0,01р$×2$=0,02р чистого элемента, а в самом первом сосуде его содержится 0,4$×$4=1,6л. Итого 1,6+0,02р л чистого элемента на 6л общей массы составит $\frac{1,6+0,02р}{6}=\frac{80+р}{300}$.

Ответ: при р$\in \left[0,40\right[ $ добавляем о л; концентрация остается 0,4

 при р=40 добавляем от 0 до 2 л; концентрация та же

 при р$\in \left]40, 100\right] $добавляем 2л и концентрация вычисляется по формуле $\frac{80+р}{300}$

слайд 17

9.Имеется два куска сплавов меди и серебра: первый массой 2кг и содержит 30% меди, второй массой 3кг и содержит 40% меди. Сколько кг второго сплава надо сплавить со всем первым куском, чтобы получить сплав, содержащий р% меди?

В первом куске 0,3$×$2=0,6 кг меди. Взяв х кг второго сплава, мы получим х$×$0,4 =0,4х кг меди. Итого, в новом сплаве массой 2+х кг содержится 0,6+0,4х кг меди, следовательно, концентрацию в р% получим, разделив массу меди на общую массу, т.е.

 $\frac{0,6+0,4х}{2+х}=0,01р$ откуда $х=\frac{2(р-30)}{40-р}$.

Ограничения на р находим из условия, что х$\in \left[0,3\right]$.

Слайд 18

Т.к. х$\geq $0,то неравенство $\frac{2(р-30)}{40-р}\geq 0, $решение которого р$\in \left[30,40\right[$.

Т.к. х$\leq $3,то неравенство$\frac{2(р-30)}{40-р}\leq 3$, откуда р$\in \left[0;36\right]\bigcup\_{}^{}\left]40;100\right]$.Учитывая решения двух неравенств, имеем: р$\in \left[30;36\right]$.

Ответ: при р$\in \left[30;36\right]$ х=$\frac{2(р-30)}{40-р}$

 при р$\in \left[0;30\right[$ $\bigcup\_{}^{}\left]36;100\right]$ х=$∅$.

Конечно, в школьной программе нет столько часов на эту тему, задачи на проценты встречаются чаще, а на смеси и сплавы, концентрацию почти нет, а на ГИА в 9 , да и на ЕГЭ в 11 классе часто встречаются, и поэтому рекомендуется тему изучать на факультативах или как элективный курс.

Литература:

1.Газета «Математика» №№ 20,22,23,25-26 за 2004 год.

2.Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике (А.Н.Руркин «ВАКО» Москва 2006)

3.Методическое пособие по математике для поступающих в Финансовую академию( под ред. В.А.Бабайцева и А.А.Рылова).

Июль 2010 г.